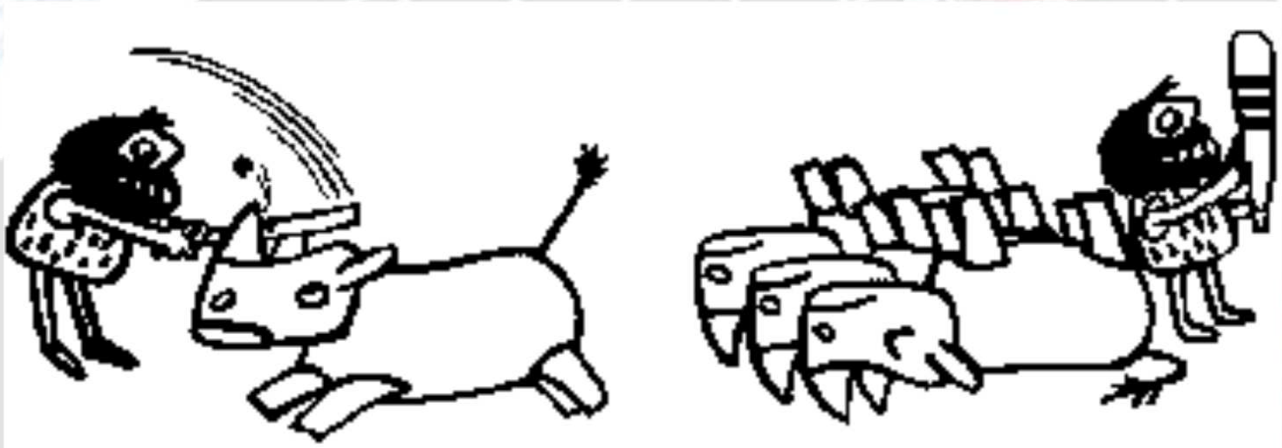
AGENDA

- Lunes 7: Terminar Capítulo 3. Entregar Tarea # 2.
- Miércoles 9: Clase de ejercicios.
- Lunes 14: Primer Parcial. Entregar Tarea #3.

CAPÍTULO 3



RESOLUCIÓN DE ECUACIONES IMPLÍCITAS

(Segunda parte)

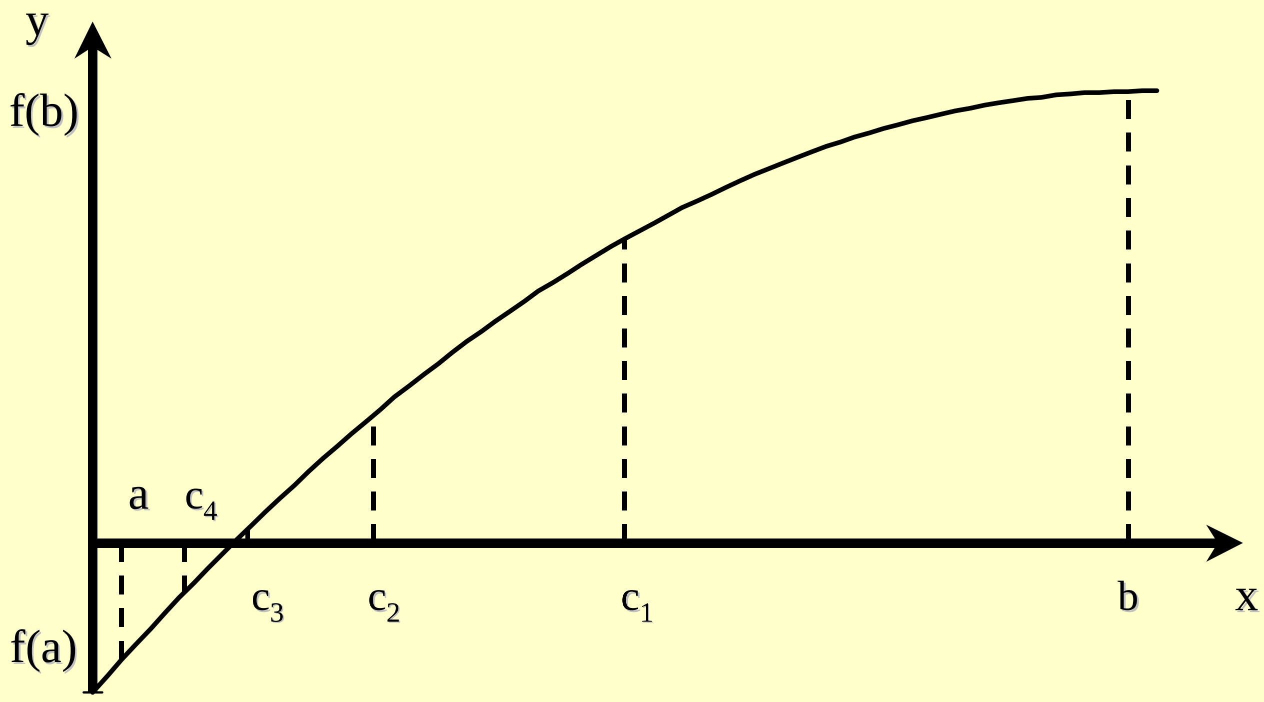
TIPOS DE MÉTODOS
Una variable

- Dos puntos iniciales: basados en el Teorema de Bolzano (Bisección, Regula-Falsi, etc.)
- Un punto inicial: Newton-Raphson, Punto Fijo, Métodos de Segundo Orden

TIPOS DE MÉTODOS
Multivariables

- Método de Newton-Raphson Multivariable.
- Método de Punto Fijo Multivariable

Método de la bisección



MÉTODO DE LA BISECCIÓN

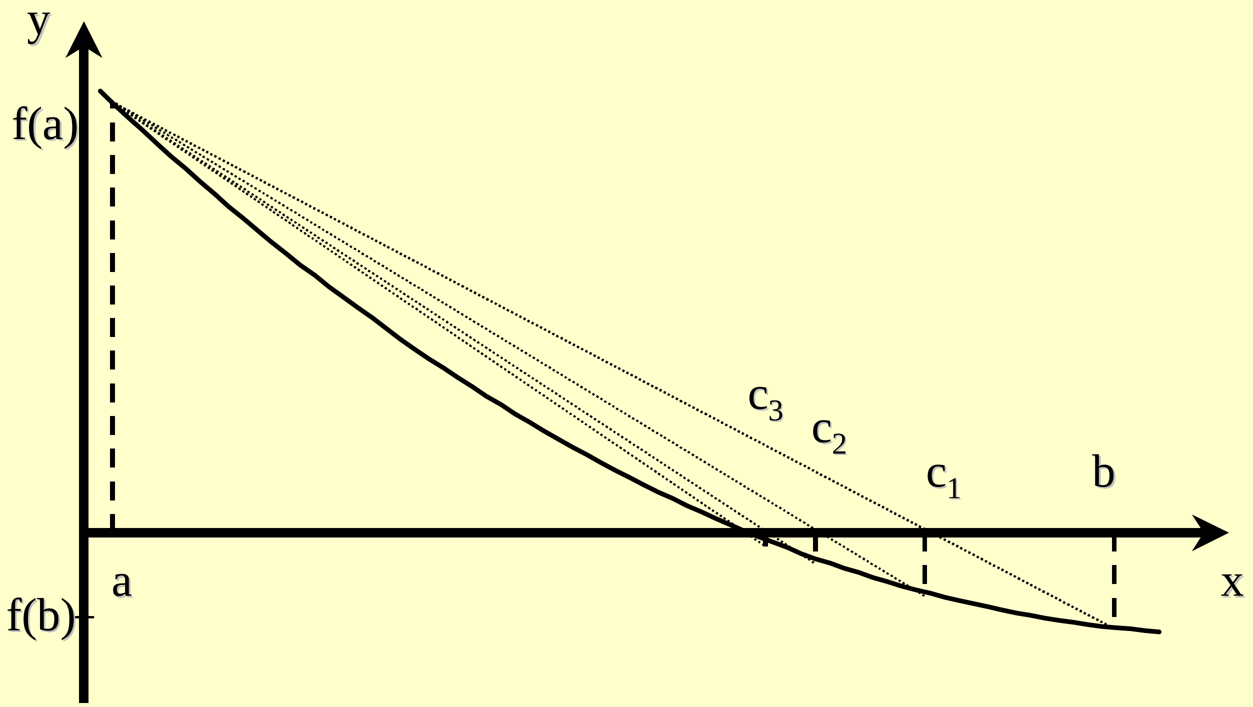
- El punto siguiente dentro del intervalo a-b es exactamente en el punto medio.

$$c = \frac{a+b}{2}$$

NÚMERO DE ITERACIONES

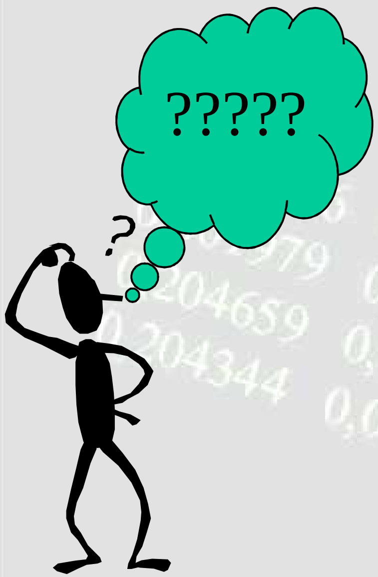
$$\varepsilon^{(n)} = \frac{b-a}{2^{n}}$$

Método regula falsi

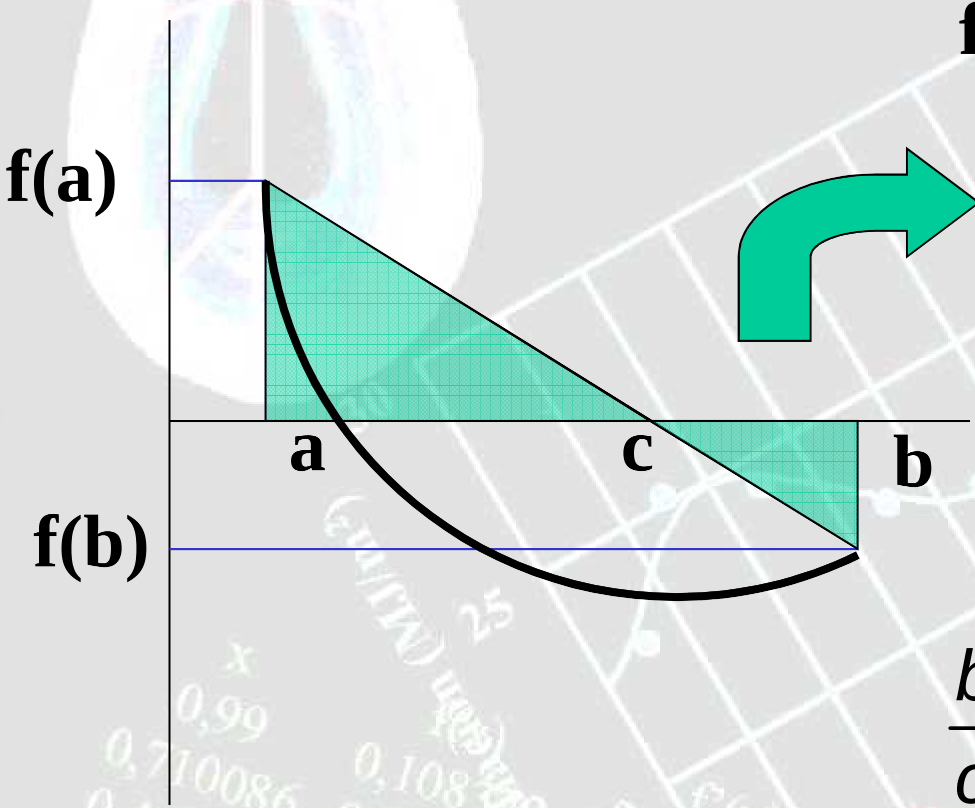


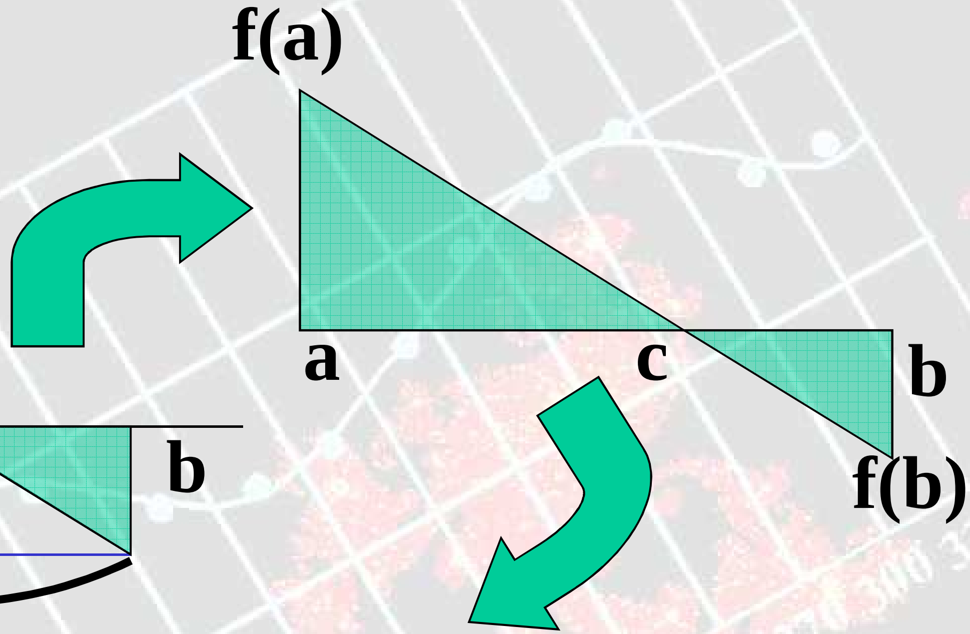
REGULA-FALSI

$$c = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$



Triángulos semejantes:



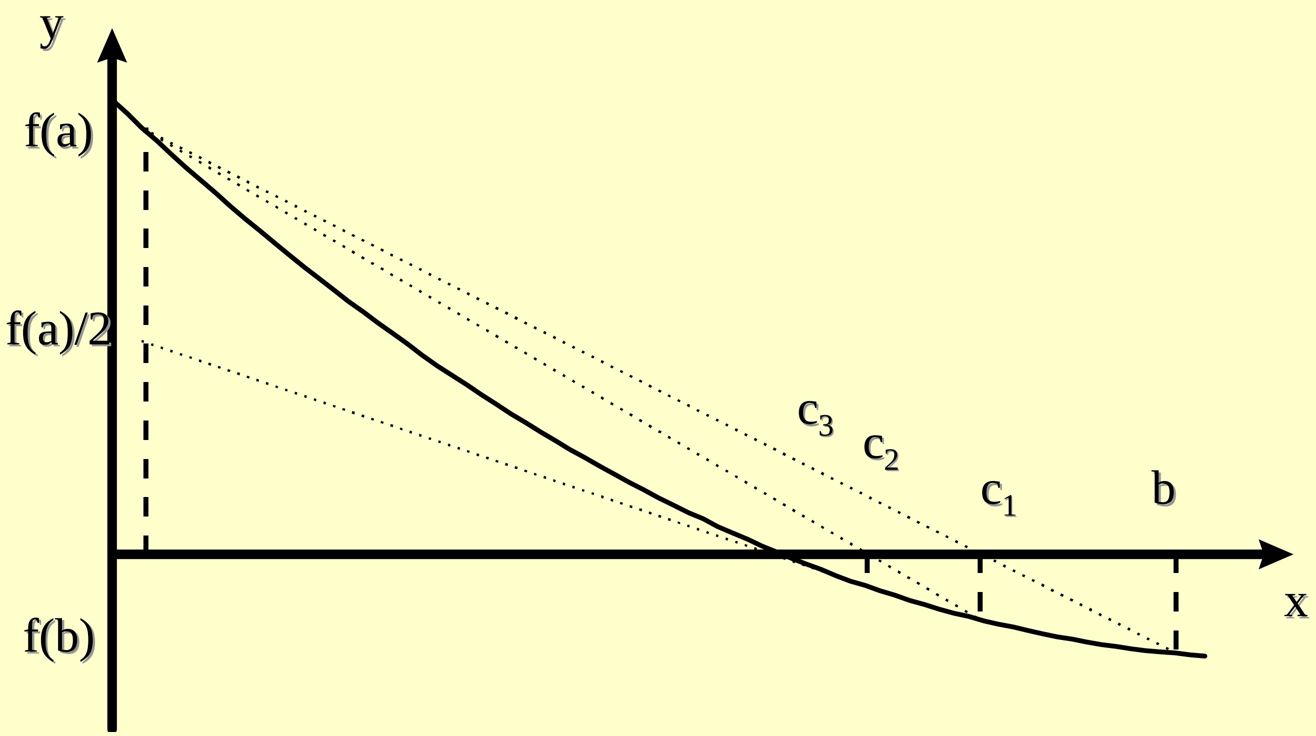


$$\frac{b-c}{c-a}=\frac{0-f(b)}{f(a)-0}$$

$$f(a)[b-c]=-(c-a)f(b)$$

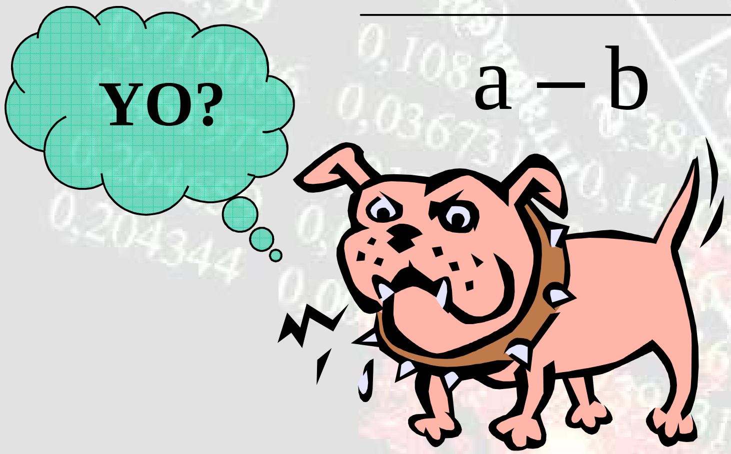
$$c=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

Método regula falsi modificado

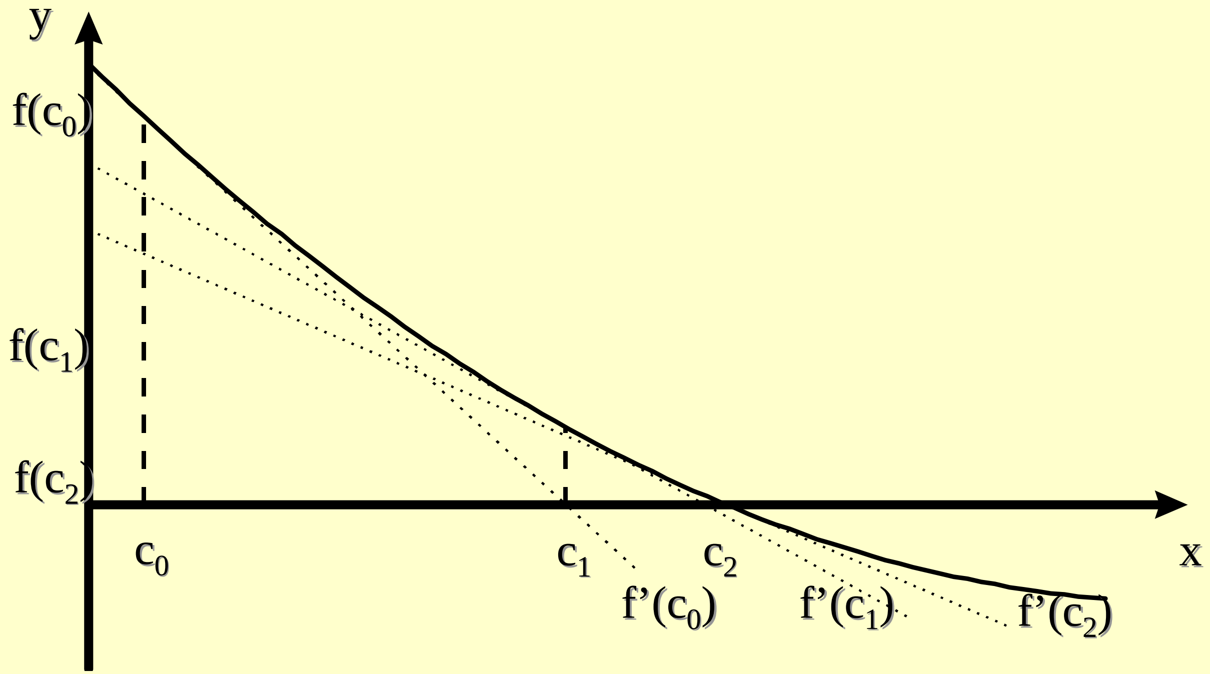


REGULA-FALSI MODIFICADO

$$c = a - \frac{f(a)}{\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} + \dfrac{\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} - \dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}}{2}}$$

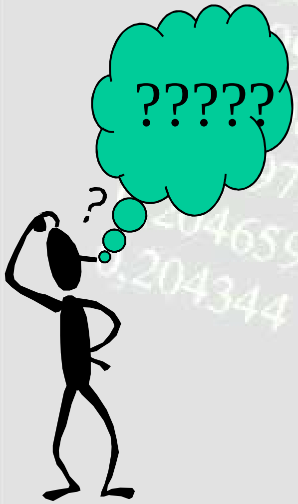


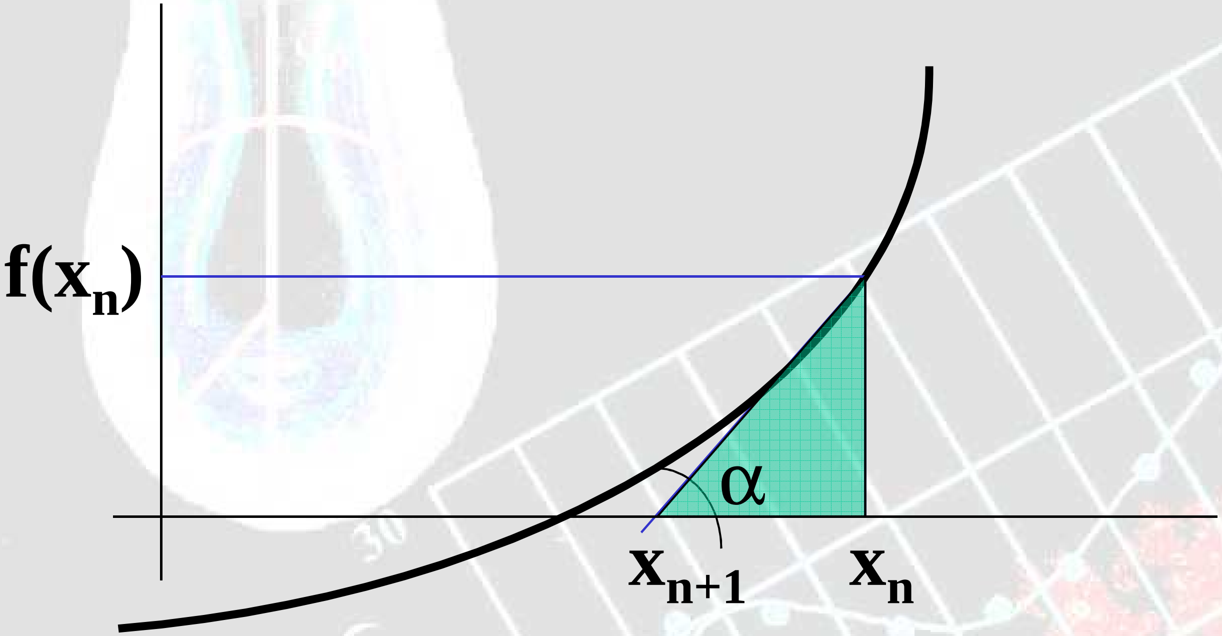
Método de Newton-Raphson



NEWTON-RAPHSON

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$$





$$f'(x_n) = \tan\alpha = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

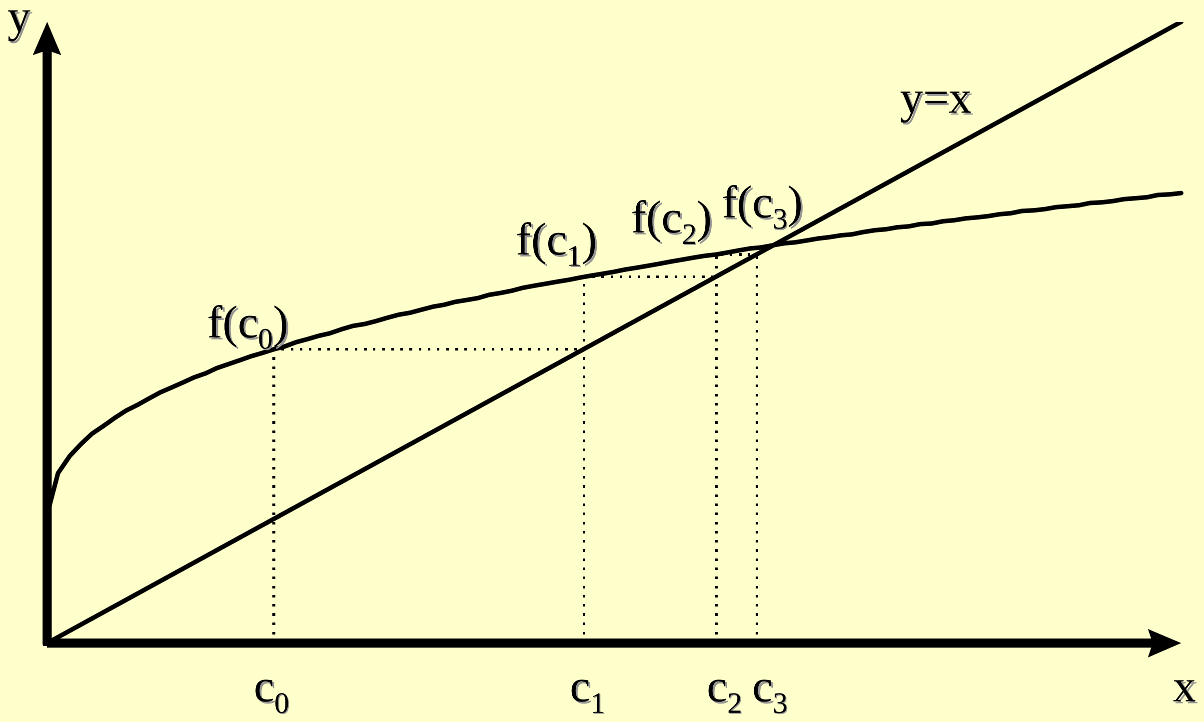
$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

CRITERIO DE CONVERGENCIA

$$\left|\frac{\varepsilon^{(n)}}{\left(\varepsilon^{(n-1)}\right)^{2}}\right| = \left|\frac{1}{2}\,\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}\right| < 1$$

Método del punto fijo



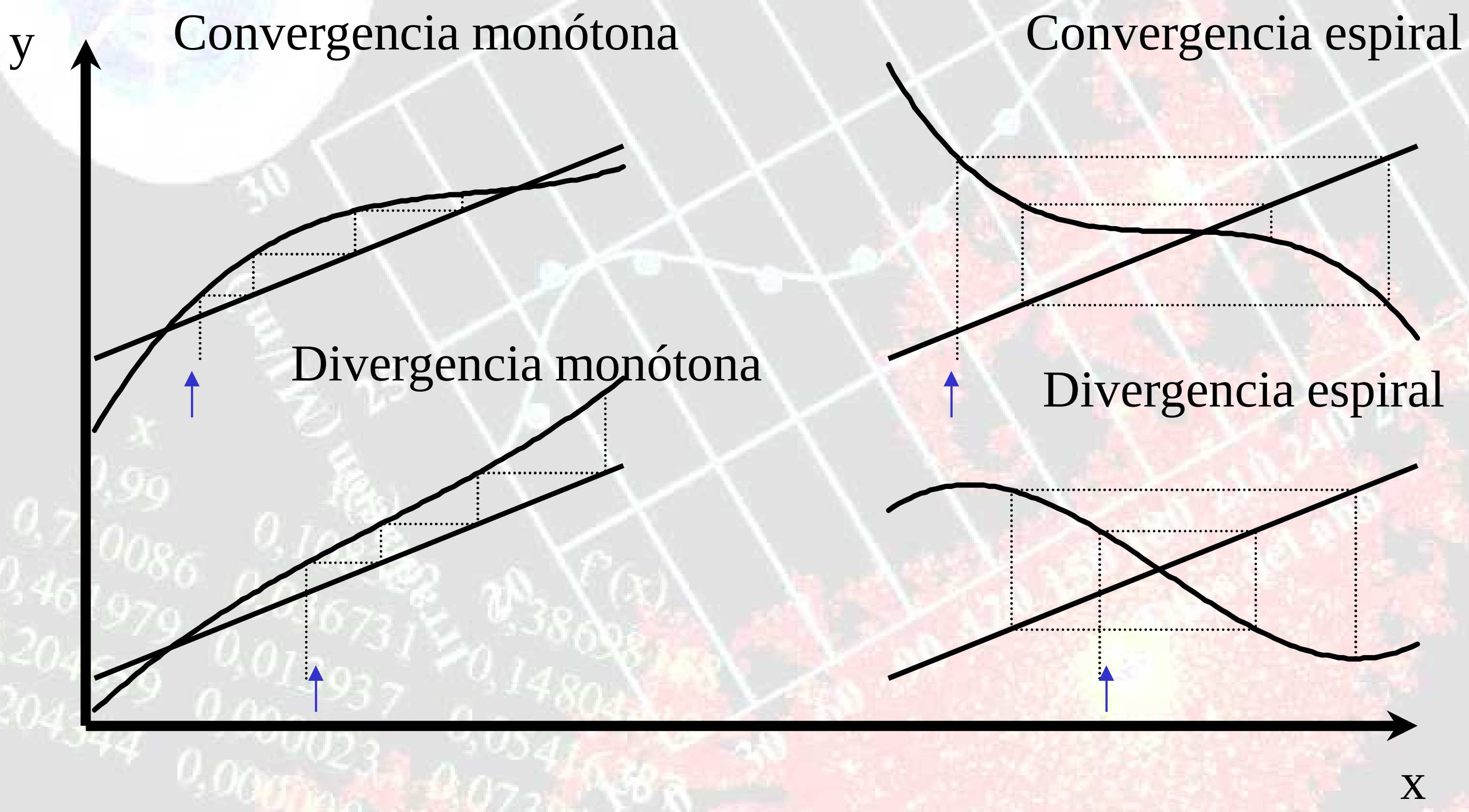
PUNTO FIJO

$$x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$$

CRITERIO DE CONVERGENCIA

$$\left|\frac{\varepsilon^{(n+1)}}{\varepsilon^{(n)}}\right| = \left|f'\left(x^{(n)}\right)\right| < 1$$

Método del punto fijo



RELAJACIÓN

- Es conveniente recordar que en numerosos casos, se puede probar la expresión:

$$x^{(n+1)} = (1-\alpha)x^{(n)} + \alpha g(x^{(n)})$$

- El valor de α es un número comprendido en el intervalo]0,1], siendo 1/2 un valor tradicional.

EJEMPLO

Resolver las raíces del siguiente polinomio por el método de Newton-Raphson:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 3x_n^2 - x_n - 3}{3x_n^2 + 6x_n - 1}$$

EJEMPLO

Paso 1 (x_0=0):

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 + 3x_0^2 - x_0 - 3}{3x_0^2 + 6x_0 - 1}$$

$$x_1 = 0 - \frac{-3}{-1} = -3$$

EJEMPLO

Paso 2 (x_1=-3):

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 + 3x_1^2 - x_1 - 3}{3x_1^2 + 6x_1 - 1}$$

$$x_2 = -3 - \frac{(-3)^3 + 3(-3)^2 - (-3) - 3}{3(-3)^2 + 6(-3) - 1} =$$

$$x_2 = -3 - \frac{0}{8} = -3$$

EJEMPLO

Resolver las raíces del siguiente polinomio por el método de Punto Fijo:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n^3 + 3x_n^2 - 3$$

$$x_0 = -3$$

$$x_1 = x_0^3 + 3x_0^2 - 3 = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 3 =$$

$$x_1 = -3$$

MÉTODOS DE SEGUNDO ORDEN

- Existen métodos que aceleran la convergencia del método de Newton-Raphson.
- Uno de los más sencillos es el método de Steffensen que toma en cuenta la derivada de segundo orden en el desarrollo en serie de Taylor.

MÉTODOS DE SEGUNDO ORDEN

- La expresión que se utiliza es:

$$0 = f(x^{(n+1)}) = f(x^{(n)}) + (x^{(n+1)} - x^{(n)})f'(x^{(n)}) + \frac{(x^{(n+1)} - x^{(n)})^2}{2} f''(x^{(n)})$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)}) + \frac{\left(x^{(n+1)} - x^{(n)}\right)}{2} f''(x^{(n)})}$$

VENTAJAS Y DESVENTAJAS

- Este tipo de fórmula permite obtener una mayor precisión en un solo cálculo.
- Requiere de la evaluación de un número superior de veces de la función y sus derivadas y por lo tanto requiere mayor tiempo de cálculo.

DESVENTAJAS

- Esta forma implícita requiere un cálculo iterativo del valor $x^{(n+1)}$, lo que es poco conveniente si se desea limitar el número de cálculos en cada paso.

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)}) + \frac{\left(x^{(n+1)} - x^{(n)}\right)}{2} f''(x^{(n)})}$$

FÓRMULA DE HALLEY

- Se conoce también la fórmula de Halley para la evaluación de la solución a partir de del conocimiento de la derivada de segundo orden.
- La expresión es:

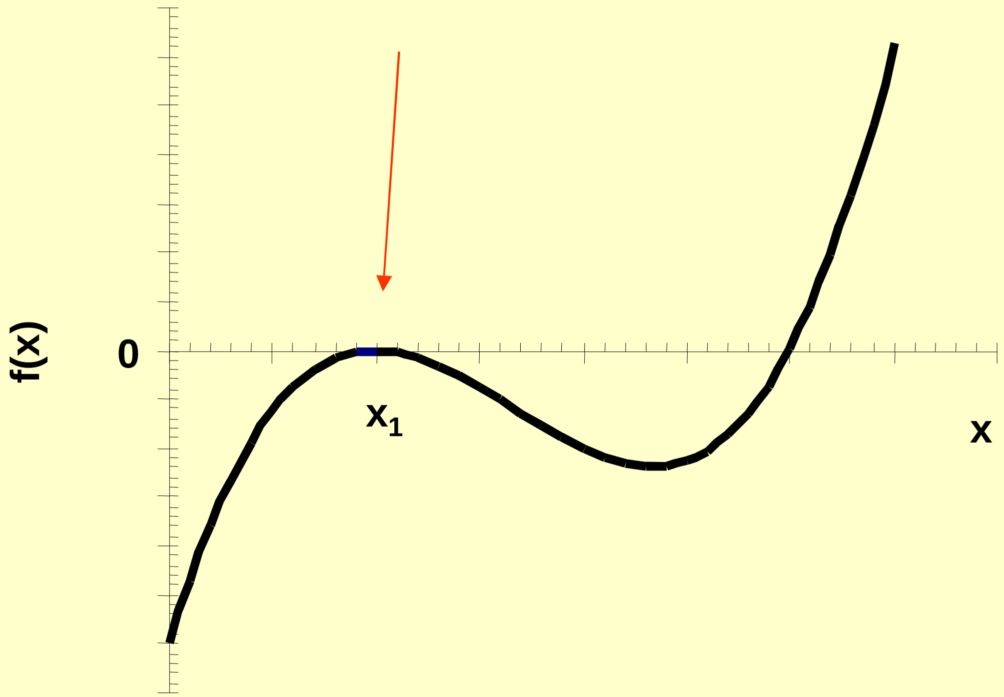
$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)}) - \frac{f(x^{(n)})f''(x^{(n)})}{2f'(x^{(n)})}}$$

RAÍCES MÚLTIPLES

- Una raíz de una función f(x) es múltiple cuando la función es tangencial al eje x.
- Por ejemplo, una raíz doble resulta de:

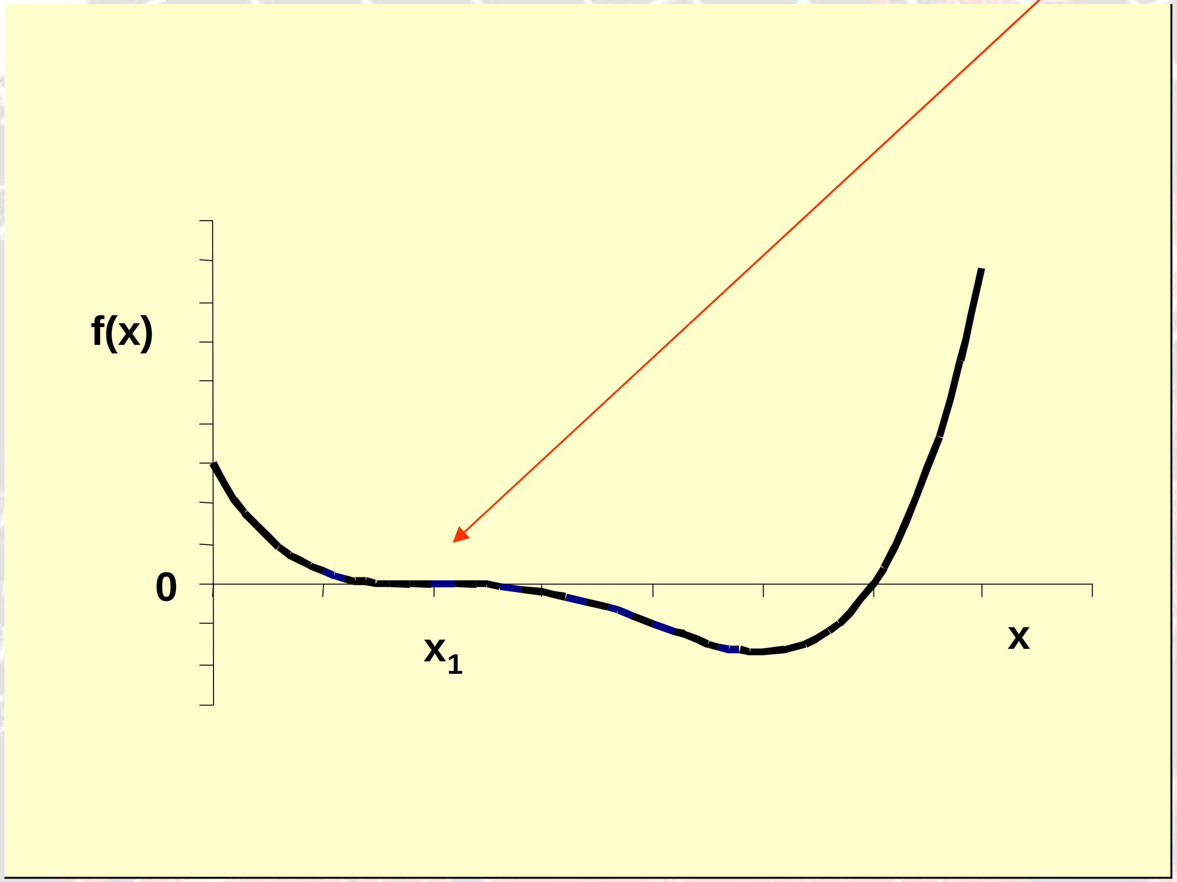
$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)^2 = x^3 - x^2\left(2x_1 + x_0\right) + x\left(x_1^2 + 2x_0x_1\right) - x_0x_1^2$$

RAICES DOBLES



RAÍCES TRIPLES

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)^3$$



PROBLEMAS

- Las funciones que presenten raíces múltiples pueden resultar muy problemáticas al querer hallar sus raíces por los métodos convencionales.
- Por ejemplo la raíces múltiples pares (doble, cuádruple, etc.) no presentan cambio de signos y su derivada es igual a cero.

MÉTODO DE RALSTON-RABINOWITZ

- Propusieron la siguiente modificación a la fórmula de Newton-Raphson:

$$x_{i+1} = x_i - m\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- donde m es la multiplicidad de la raíz (esto es que m=2 para una raíz doble, m=3 para una raíz triple, etc.).

MÉTODO DE RALSTON-RABINOWITZ

- Claro que no es muy satisfactorio tener que conocer la multiplicidad de una raíz previamente; por eso es que los mismos autores proponen una nueva función u(x) como la relación de una función con su derivada; es decir:

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

MÉTODO DE RALSTON-RABINOWITZ

- Demostraron que la función u(x) tiene las mismas raíces que la función original, por lo que proponen la siguiente fórmula para el cálculo iterativo:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x_i)} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)f''(x_i)}$$

NEWTON-RAPHSON MULTIVARIABLE

$$f_i(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) + h_1\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \ldots + h_n\frac{\partial f_i}{\partial x_n}$$

$$\mathbf{J}\qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & . & . & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & . & . & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1^{(n+1)} - x_1^{(n)} \\ x_2^{(n+1)} - x_2^{(n)} \\ . \\ . \\ x_m^{(n+1)} - x_m^{(n)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}^{(n)}) \\ f_2(\mathbf{x}^{(n)}) \\ . \\ . \\ f_m(\mathbf{x}^{(n)}) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{J}^{-1}f(\mathbf{x}^{(n)})}$$

SISTEMA 2X2

$$\begin{pmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}^{(n)}) \\ f_2(\mathbf{x}^{(n)}) \end{pmatrix}$$

SISTEMA 2X2

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} - \dfrac{f_1(x^{(n)})\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} - f_2(x^{(n)})\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}}{|\mathbf{J}|} \\[2ex] x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)} - \dfrac{f_2(x^{(n)})\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} - f_1(x^{(n)})\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}}{|\mathbf{J}|} \end{cases}$$

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

PUNTO FIJO MULTIVARIABLE
Jacobi

$$
\begin{pmatrix}
x_1^{(n+1)} \\
x_2^{(n+1)} \\
. \\
x_i^{(n+1)} \\
. \\
x_{m-1}^{(n+1)} \\
x_m^{(n+1)}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
g_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\
g_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\
. \\
g_i(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\
. \\
g_{m-1}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\
g_{m1}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)})
\end{pmatrix}
$$

PUNTO FIJO MULTIVARIABLE
Gauss-Seidel

$$
\begin{pmatrix}
x_1^{(n+1)} \\
x_2^{(n+1)} \\
\cdot \\
x_i^{(n+1)} \\
\cdot \\
x_{m-1}^{(n+1)} \\
x_m^{(n+1)}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
g_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\
g_2(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\
\cdot \\
g_i(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\
\cdot \\
g_{m-1}(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, .., x_i^{(n+1)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\
g_{m1}(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, .., x_i^{(n+1)}, .., x_{m-1}^{(n+1)}, x_m^{(n)})
\end{pmatrix}
$$

PUNTO FIJO MULTIVARIABLE
Relajación

$$
\begin{pmatrix}
x_1^{(n+1)} \\
x_2^{(n+1)} \\
. \\
x_i^{(n+1)} \\
. \\
x_{m-1}^{(n+1)} \\
x_m^{(n+1)}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\omega g_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) + (1-\omega) g_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\
\omega g_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) + (1-\omega) g_2(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\
. \\
\omega g_i(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) + (1-\omega) g_i(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\
. \\
\omega g_{m-1}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) + (1-\omega) g_{m-1}(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, .., x_i^{(n+1)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) \\
\omega g_m(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, .., x_i^{(n)}, .., x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}) + (1-\omega) g_{m1}(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, .., x_i^{(n+1)}, .., x_{m-1}^{(n+1)}, x_m^{(n)})
\end{pmatrix}
$$

POLINOMIOS
Segundo grado

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}$$

POLINOMIOS
Tercer grado - Cardano

$$p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0$$

$$b_0 = \frac{a_0}{a_3} - \frac{a_2}{3a_3}\left(\frac{a_1}{3a_3} - \frac{a_2^2}{9a_3^2}\right) = c_0 + c_2\left(3c_1 - 2c_2^2\right)$$

$$b_1 = \frac{a_1}{3a_3} - \frac{a_2^2}{9a_3^2} = c_1 - c_2^2$$

$$c_0 = \frac{a_0}{a_3}; \qquad c_1 = \frac{a_1}{3a_3}; \qquad c_2 = \frac{-a_2}{3a_3}$$

DISCRIMINANTE (H)

$$H = b_0^2 + 4b_1^3$$

Si H≥0, existen dos raíces complejas conjugadas y una raíz real.

$$E = \sqrt[3]{\frac{-b_0 + \sqrt{H}}{2}} \qquad F = \sqrt[3]{\frac{-b_0 - \sqrt{H}}{2}}$$

$$y_1 = E + F \qquad y_{2;3} = -\frac{E+F}{2} \pm i\sqrt{3}(E - F)$$

Si H=0, existen tres raíces reales, una siendo raíz doble.

$$y_1 = E + F \qquad\qquad y_{2;3} = -\frac{E+F}{2}$$

Si H<0, existen tres raíces reales:

$$y_1 = -2\sqrt{-b_1}\cos(\theta) \qquad\qquad y_2 = -2\sqrt{-b_1}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$y_3 = -2\sqrt{-b_1}\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \qquad\qquad \theta = \frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{b_0}{2\sqrt{-b_1^3}}\right)$$

PARCIAL 1

- Día: 14 de febrero
- Duración: 2 horas
- Lugar: ENE-104
- Requiere: Calculadora. Hojas blancas tamaño carta.
- Tipo de examen: Libro abierto.

ESTRUCTURA DEL EXAMEN

- Dos partes: Teórica y práctica.
- Teórica: Selección sencilla. Cuatro preguntas incorrectas anulan una correcta. Entre 20 y 30 preguntas.
- Práctica: Tres problemas que pueden ser de: desarrollo, demostración, resolver un sistema sencillo o plantear un problema complejo.